

Tema A3a.Mecánica Teórica: Análisis elastoestático

“Análisis elastoestático mediante el método isogeométrico de elementos frontera”

S.V. Camacho Gutiérrez^a, J.C. Jauregui-Correa^a

^aUniversidad Autónoma de Querétaro, Cerro de las Campanas S/N, Santiago de Querétaro, Querétaro, 76010, México

*Autor de contacto. Dirección de correo electrónico: scamacho21@alumnos.uaq.mx

RESUMEN

En el análisis del medio continuo existen tres métodos numéricos importantes: elementos finitos, elementos frontera y celdas finitas. De estos métodos, elementos finitos es el más popular en la industria, sin embargo, se desperdicia alrededor del 60% de todo el análisis en la generación de una geometría adecuada (enmallado). Este problema puede minimizarse si se toma como geometría para análisis a la generada directamente del software de ingeniería asistida por computadora, dicho procedimiento se conoce como análisis isogeométrico. No obstante, esta técnica puede usarse con los otros métodos numéricos; en este trabajo se presenta una implementación de elementos frontera y análisis isogeométrico para resolver un problema elastoestático. Los resultados se compararon con el método tradicional de elementos frontera y con un modelo analítico.

Palabras Clave: Análisis isogeométrico, elementos frontera, problema elastoestático

ABSTRACT

In the analysis of continuum mechanics there are three important numerical methods: finite elements, boundary elements and finite cells. Of these methods, finite elements is the most popular in the industry, however, about 60% of the entire analysis is wasted in generating an appropriate geometry (mesh). This problem can be minimized if it is taken as a geometry for analysis to that generated directly from the software of computer-aided engineering, this procedure is known as isogeometric analysis. However, this technique can be used with the other numerical methods; this paper presents an implementation of boundary elements and isogeometric analysis to solve an elastostatic problem. The results were compared with the traditional method of boundary elements and an analytical model.

Keywords: Isogeometric analysis, boundary element, elastostatic problem

1. Introducción

La mayoría de los problemas en ingeniería se resuelven analíticamente mediante técnicas numéricas. En el área de mecánica del medio continuo estas técnicas pueden clasificarse en: diferencias finitas (FD, por sus siglas en inglés), elementos finitos (MEF), y elementos frontera (BEM, por sus siglas en inglés).

Estos métodos consisten en dividir al cuerpo de estudio (medio continuo) en elementos discretos, los cuales se analizan individualmente de acuerdo a las ecuaciones constitutivas del problema. Posteriormente, se usan relaciones adicionales para ensamblar los elementos y de esta forma obtener el valor, por ejemplo, de desplazamientos o deformaciones en el cuerpo. Entre más pequeños sean los elementos, la solución numérica es más exacta.

Actualmente, el método más usado en la industria es el de elementos finitos, el cual es programado en software de ingeniería asistida por computadora comerciales (CAE, por sus siglas en inglés), tales como ANSYS, SOLIDWORKS, etc. Asimismo, se tienen programas que integran la fase de diseño de asistido por computadora (CAD) con software CAE. Sin embargo, en un estudio del proceso CAD-CAE Sandia National Laboratories encontró que la elaboración del modelo en software CAD consume alrededor del 20% de todo el tiempo de simulación y la creación de la geometría adecuada para el análisis requiere alrededor del 60% y solo el 20% de todo el tiempo es dedicado al análisis por elemento finito [1].

Sin embargo, Hughes en 2005 [1] propuso un cambio substancial para la integración de software CAD-CAE: utilizar directamente el modelo geométrico generado por software CAD como modelo de análisis y de esta forma mantener la compatibilidad con los procesos actuales,

disminuyendo considerablemente el tiempo empleado para el análisis y el error derivado de la aproximación geométrica. Este concepto fue llamado Análisis Isogeométrico (IGA, por sus siglas en inglés) y desde entonces, una gran cantidad de artículos han aparecido.

Algunos trabajos han demostrado que la técnica de análisis isogeométrico provee representaciones geométricas más precisas y eficientes comparadas con las usadas en el método de elemento finito tradicional [2]–[4]. Otros artículos han trasladado el método de isogeometría a los métodos numéricos de celdas finitas [5], [6] o elementos frontera [7]–[9]. También se han propuesto diferentes alternativas basadas en análisis isogeométrico para resolver problemas electromagnéticos [10], de fluidos [11], [12], de contacto [13]–[15], de transferencia de calor [16], etc.

Aunque la mayoría de los trabajos siguen enfocándose en elemento finito, el número de investigaciones relacionadas con el método de elementos frontera ha ido incrementándose puesto que su naturaleza implica una reducción en los grados de libertad pues sólo requiere la discretización del contorno y no del cuerpo completo a analizar [17].

El objetivo del presente trabajo es mostrar la implementación del método isogeométrico de elementos frontera para resolver un problema elastoestático en dos dimensiones, un cilindro presurizado de pared gresa, y comprobar los resultados con el método de elementos frontera tradicional.

2. Elementos frontera

La base del método de elementos frontera es teorema de trabajo recíproco (o Teorema de Betti) el cual establece que el trabajo hecho por un sistema de esfuerzos A sobre los desplazamientos del sistema B es igual al trabajo hecho por los esfuerzos del sistema B sobre los desplazamientos del sistema A:

$$\int_V \sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B dV = \int_V \sigma_{ij}^B \varepsilon_{ij}^A dV \quad (1)$$

Expresando la ec.1 en términos de los desplazamientos se transforma en:

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^A \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}^B \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] dV \quad (2)$$

Dada la ecuación de equilibrio de un elemento con área diferencial pequeña y fuerzas de cuerpo f_x y f_y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Luego, expandiendo el primer término de la ec.2 y sustituyendo las fuerzas de cuerpo de acuerdo a la ec.3, resulta la siguiente igualdad:

$$\int_V \sigma_{ij}^A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij}^A u_i) \right] dV + \int_V f_i^A u_i dV \quad (4)$$

Tomando en cuenta la siguiente definición de tracción t_i :

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (5)$$

Aplicando el teorema de divergencia al segundo término de la ec.4 y usando la relación anterior se elimina los esfuerzos del lado derecho de la ec.4, convirtiéndose en:

$$\int_V \sigma_{ij}^A \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV = \int_S t_i^A u_i dS + \int_V f_i^A u_i dV \quad (6)$$

Luego, aplicando el mismo proceso al esfuerzo σ_{ij}^B , se llega a la expresión:

$$\int_S t_i^A u_i dS + \int_V f_i^A u_i dV = \int_S t_i^B u_i dS + \int_V f_i^B u_i dV \quad (7)$$

El conjunto A corresponde al problema a ser resuelto y el conjunto B pertenece al sistema conocido de tracciones y desplazamientos válidos para cualquier geometría en equilibrio. Así, un conjunto que es aplicable a todos los cuerpos en equilibrio es la solución de Kelvin para desplazamientos y tracciones [18]. Aplicando esta solución fundamental a la ec.7, se llega a la identidad Somigliana para desplazamientos:

$$\begin{aligned} u_i(p) &= - \int_S T_{ij}(p, Q) u_j(Q) dS + \int_S U_{ij}(p, Q) t_j(Q) dS + \dots \\ &+ \int_V U_{ij}(p, q) f_j(Q) dV \end{aligned} \quad (8)$$

Donde $T_{ij}(p, Q)$ y $U_{ij}(p, Q)$ representan la solución de Kelvin (ec. 9 y 10); $u_j(Q)$, $t_j(Q)$ y $f_j(Q)$ corresponden a los desplazamientos, tracciones y fuerzas del problema a resolver.

$$\begin{aligned} T_{xx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2] \\ T_{xy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right] \\ T_{yx}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \left(\frac{\partial r}{\partial y} n_x - \frac{\partial r}{\partial x} n_y \right) \right] \\ T_{yy}(p, Q) &= \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right) [(1-2\nu) + 2 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2] \end{aligned} \quad (9)$$

$$U_{xx}(p, Q) = \frac{1}{8\Pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (10)$$

$$U_{yx}(p, Q) = U_{xy}(p, Q) = \frac{1}{8\Pi\mu(1-\nu)r} \left[\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right]$$

$$U_{yy}(p, Q) = \frac{1}{8\Pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{\partial r}{\partial y} \right)^2 \right]$$

De la ecuación anterior se identifican la función $r(p, Q)$, que representa la distancia física entre los puntos p y Q (ec.11), la derivada normal de r que se expresa en la ec.12 y las derivadas de x y y con respecto al vector dirigido al exterior n (ec.13):

$$r(p, Q) = \sqrt{(X_p - x_Q)^2 + (Y_p - y_Q)^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (12)$$

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial x} = \frac{x_Q - X_p}{r(p, Q)} \quad (13)$$

$$\frac{\partial r(p, Q)}{\partial y} = \frac{y_Q - Y_p}{r(p, Q)}$$

Finalmente, suponiendo ausencias de fuerzas de cuerpo, se obtiene la ecuación integral de borde o frontera (ec.14) que relaciona la solución fundamental (kernels U_{ij} y T_{ij}) con el problema elastoestático a resolver (variables u_j y t_j).

$$u_{i(p)} + \int_{\Gamma} T_{ij}(p, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}(p, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (14)$$

Para resolver la ecuación anterior, el método de elementos frontera divide el contorno del cuerpo en elementos y cada elemento en puntos nodales. Luego, se fija un punto nodal p y se obtienen los desplazamientos y tracciones con respecto a los demás puntos (Q) usando las ecs.9 y 10. Posteriormente se cambia el punto nodal por el nodo contiguo y al igual que con el nodo anterior, se evalúa con respecto a los demás nodos; formando de esta manera un sistema de ecuaciones lineales cuyas soluciones corresponden a la ecuación integral de borde.

3. Modelación geométrica

El núcleo del análisis isogeométrico es la unificación de software *CAD-CAE* al utilizar como modelo de análisis del software *CAE* al modelo geométrico generado por software *CAD*. Aunque existen diversas maneras de generar modelos en software *CAD*, las curvas B-Spline no uniformes racionales (*NURBS*, por sus siglas en inglés) son las que tienen mejores características puesto que permiten

representar con precisión líneas, curvas, superficies y sólidos de manera recursiva y con menor cantidad de información que las aproximaciones más usadas, por ejemplo, los polinomios de Lagrange. De acuerdo a Piegl y Wayne [19], una curva *NURBS* de grado p se define por:

$$C(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} B_i w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i N_{i,p}(\xi)} \quad (15)$$

$$a < \xi < b$$

Cuyos elementos principales son los puntos de control B_i y las funciones base $N_{i,p}$ de grado p definidas con los elementos del vector del parámetro ξ . Por lo general, se asume que $a=0$ y $b=1$, y que $w_i > 0$, por tanto:

$$R_{i,p} = \frac{B_i w_i N_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i N_{i,p}(\xi)} \quad (16)$$

Por lo tanto, una curva *NURBS* puede escribirse como:

$$C(\xi) = \sum_{i=0}^n B_i R_{i,p}(\xi) \quad (17)$$

Por otra parte, las derivadas de las curvas *NURBS* se obtienen simplemente al diferenciar la ec.15 o 17 [20].

$$C'(\xi) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i R'_{i,p}(\xi) \quad (18)$$

$$R'_{i,p}(\xi) = \frac{w_i N'_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i N_{i,p}(\xi)} - \frac{w_i N_{i,p}(\xi) \sum_{i=1}^{n+1} w_i N'_{i,p}(\xi)}{\sum_{i=1}^{n+1} w_i N_{i,p}(\xi)^2} \quad (19)$$

4. Método isogeométrico de elementos frontera

A diferencia del método tradicional de elementos frontera, los puntos de prueba p y Q no se refieren a los puntos físicos sino al vector de nudos (espacio paramétrico) que se usó para crear la curva. Debido a que las ecuaciones de tracciones y desplazamientos pueden indeterminarse con nudos repetidos, solo se toman valores únicos del vector de nudos.

De acuerdo a Simpson [7], los desplazamientos y tracciones se interpolan usando aproximaciones con *NURBS* (ecs.20 y 21). Donde q_j^a y d_j^a representan los coeficientes de tracción y desplazamiento asociados a un punto de control.

$$u_j(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) d_j^i \quad (20)$$

$$t_j(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) q_j^i \quad (21)$$

Puesto que las funciones bases no tienen soporte local, estas deberán ser evaluadas sobre las partes de la frontera que sean no cero:

$$u_j(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i^e(\xi) d_j^{ie} \quad (22)$$

$$t_j(\xi) = \sum_{i=1}^{p+1} N_i^e(\xi) d_j^{ie} \quad (23)$$

Donde la función N se define de acuerdo a la ec.24, y las funciones base globales i son relacionadas al número local l y al número de elemento e mediante una matriz de conectividad. Por ejemplo, si un cuerpo se define mediante tres tramos de curvas NURBS acopladas, que a su vez comparten m cantidad de nodos (dependiendo si los elementos son lineales, cuadráticos, cúbicos, etc.), la matriz de conectividad [No. De elemento e, nodo ll, nodo l2...,] podría ser: [1,1,2,3;2,3,4,5;3,5,6,7].

$$N_i^e \equiv R_{a,p}(\xi) \quad (24)$$

Sustituyendo las expresiones de las ecs. 20 y 21 en la ecuación integral de borde, resulta la siguiente igualdad:

$$C_{ij}(p) \sum_{i=1}^m N_i^e(\hat{\xi}) d_j^{ie} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{m+1} [\int_{-1}^1 T_{i,j}(p, Q(\hat{\xi})) N_i^e(\hat{\xi}) J(\hat{\xi}) d\hat{\xi}] d_j^{ie} = \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{m+1} [\int_{-1}^1 U_{i,j}(p, Q(\hat{\xi})) N_i^e(\hat{\xi}) J(\hat{\xi}) d\hat{\xi}] q_j^{le} \quad (25)$$

El término C_{ij} se agrega a la ecuación debido a que los puntos p y Q originalmente se encuentran en el interior del cuerpo, y para moverlos a la frontera se requiere de este elemento. Básicamente, este término es una matriz de transformación del interior a la frontera del cuerpo, y se conoce como el término de “salto”.

Por otra parte, en la ec.25 se agregan otros elementos, por ejemplo, $\hat{\xi}$ representa el sistema coordenado local $\hat{\xi} \in [-1,1]$, e denota al elemento conteniendo el punto de colocación p, $\hat{\xi}^l$ significa la coordenada local del punto de colocación y finalmente, $J(\hat{\xi})$ representa una transformación Jacobiana (ec.26), puesto que se hace una transformación del medio físico a un medio definido por el parámetro ξ .

$$J(\hat{\xi}) = \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \quad (26)$$

Asimismo, tenemos las siguientes expresiones que complementan al Jacobiano de la ec.26.

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \quad (27)$$

$$\xi = \frac{[(\xi_2 - \xi_1)\xi_2 + (\xi_2 + \xi_1)]}{2} \quad (28)$$

$$\frac{d\xi}{d\hat{\xi}} = \frac{\xi_2 - \xi_1}{2} \quad (29)$$

5. Implementación

Para la implementación numérica se siguió el esquema mostrado por Simpson [7], el cual contempla el método de colocación para definir los puntos p y Q y dos esquemas de integración para situaciones de singularidad. El método isogeométrico de elementos frontera fue probado en el análisis de un cilindro presurizado de pared gruesa, el cual tiene un radio interior de 3.0 m, un radio exterior de 6.0 m, una presión de 1.0 Pa y con las siguientes propiedades de materiales: $E=1.0$ y $\nu=0.3$. Dicho cilindro se considera lo suficientemente largo para aplicar las condiciones de deformación plana. Para fines de este trabajo, se modeló y analizó 1/4 del cilindro presurizado (fig. 1).

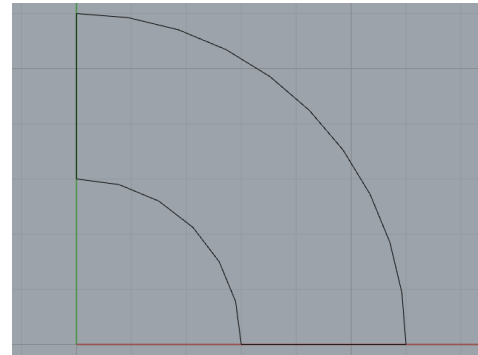


Figura 1 - 1/4 de un cilindro presurizado

Después de programar este método, se compararon sus resultados con los obtenidos por Becker [18] de manera analítica y con el método tradicional de elementos frontera. Los resultados muestran que se la desviación en los resultados es mínima (<5 %), por tanto, esta técnica puede usarse para problemas con geometrías más complejas que el método tradicional de elementos frontera o de elementos finito no podrían trabajar.

4. Conclusión

Dada la naturaleza de los elementos frontera, se necesitan menos grados de libertad para generar la geometría apropiada para el análisis. Sin embargo, cuando se implementa con curvas NURBS, se necesitan menos grados de libertad para crear dicha geometría. Asimismo, es importante mencionar que las curvas NURBS permiten agregar puntos de control sin afectar la forma general del cuerpo además de controlar la continuidad de la curva mediante la repetición de valores en el vector de nudos.

Análisis isogeométrico es una técnica que está revolucionando la manera de analizar cuerpos, por tanto,

existe una cantidad impresionante de variaciones que pueden ser ejecutadas a fin de resolver problemas más complejos, por ejemplo, aquellos que implican contacto o que por su naturaleza son del tipo no lineal.

Agradecimientos

Los autores agradecen al CONACYT por su apoyo.

REFERENCIAS

-
- [1] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, no. 39–41, pp. 4135–4195, 2005.
- [2] J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, L. B. Ao, T. J. R. Hughes, and G. Sangalli, "Isogeometric Analysis: Approximation, Stability," vol. 16, no. 7, pp. 1031–1090, 2006.
- [3] A. Cottrell, T. Hughes, and B. Yuri, *Isogeometric analysis toward integration of CAD and FEA*. West Sussex: John Wiley & Sons, Ltd, 2009.
- [4] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, S. Lipton, M. A. Scott, and T. W. Sederberg, "Isogeometric analysis using T-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 5–8, pp. 229–263, 2010.
- [5] E. Rank, M. Ruess, S. Kollmannsberger, D. Schillinger, and A. Düster, "Geometric modeling, isogeometric analysis and the finite cell method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 249–252, pp. 104–115, 2012.
- [6] T. Hoang, C. V. Verhoosel, F. Auricchio, E. H. van Brummelen, and A. Reali, "Mixed Isogeometric Finite Cell Methods for the Stokes problem," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 316, pp. 400–423, 2017.
- [7] R. N. Simpson, S. P. A. Bordas, J. Trevelyan, and T. Rabczuk, "A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 209–212, pp. 87–100, 2012.
- [8] M. A. Scott, R. N. Simpson, J. A. Evans, S. Lipton, S. P. A. Bordas, T. J. R. Hughes, and T. W. Sederberg, "Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 254, pp. 197–221, 2013.
- [9] H. Lian, P. Kerfriden, and S. P. A. Bordas, "Shape optimization directly from CAD: An isogeometric boundary element approach using T-splines," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 317, pp. 1–41, 2017.
- [10] R. N. Simpson, Z. Liu, R. Vázquez, and J. A. Evans, "An isogeometric boundary element method for electromagnetic scattering with compatible B-spline discretizations," *J. Comput. Phys.*, vol. 362, pp. 264–289, 2018.
- [11] Y. Bazilevs and T. J. R. Hughes, "NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components," *Comput. Mech.*, vol. 43, no. 1, pp. 143–150, 2008.
- [12] G. Beer, V. Mallardo, E. Ruocco, and C. Düster, "Isogeometric Boundary Element Analysis of steady incompressible viscous flow, Part 1: Plane problems," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 326, pp. 51–69, 2017.
- [13] I. Temizer and C. Hesch, "Hierarchical NURBS in frictionless contact," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 299, pp. 161–186, 2016.
- [14] X. Shu, J. Zhang, L. Han, and Y. Dong, "A surface-to-surface scheme for 3D contact problems by boundary face method," *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 70, pp. 23–30, 2016.
- [15] O. Weeger, B. Narayanan, L. De Lorenzis, J. Kiendl, and M. L. Dunn, "An isogeometric collocation method for frictionless contact of Cosserat rods," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 321, pp. 361–382, 2017.
- [16] Z. An, T. Yu, T. Q. Bui, C. Wang, and N. A. Trinh, "Implementation of isogeometric boundary element method for 2-D steady heat transfer analysis," *Adv. Eng. Softw.*, vol. 116, no. November 2017, pp. 36–49, 2018.
- [17] V. P. Nguyen, C. Anitescu, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis: An overview and computer implementation aspects," *Math. Comput. Simul.*, vol. 117, pp. 89–116, 2015.
- [18] A. A. Becker, *The boundary Element Method in Engineering*, 1°. Cambridge, 1992.
- [19] L. Piegl and T. Wayne, *The NURBS Book*, 2nd ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [20] D. F. Rogers, *An introduction to NURBS: With historical perspective*. Morgan Kaufmann Publishers, 2001.